

# Wann ist der Käfer erstmals in der gegenüberliegenden Ecke?

NORBERT HENZE, KARLSRUHE, UND JUDITH SCHILLING, DARMSTADT

**Zusammenfassung:** Ein Käfer beginnt eine gedächtnislose rein zufällige Irrfahrt entlang der Kanten des Einheitsquadrates oder derjenigen des Einheitswürfels. Dabei startet er jeweils in der im Ursprung des Koordinatensystems befindlichen Ecke. Die Zufallsgröße  $W$  bezeichne die Anzahl der Schritte (Wanderungen entlang der Kanten), die der Käfer benötigt, bis er erstmals in der jeweils gegenüberliegenden Ecke angekommen ist. In diesem Aufsatz bestimmen wir in beiden Fällen den Erwartungswert und die Varianz sowie die Verteilung von  $W$ , und wir gehen auch auf eine direkte Verallgemeinerung ein, bei der die Irrfahrt auf den Ecken des  $d$ -dimensionalen Einheitswürfels für  $d \geq 4$  erfolgt. Im Fall  $d = 4$  kommt mit der erzeugenden Funktion ein mächtiges Werkzeug zum Einsatz. Jede Lehrkraft wird sehen, dass es äußerst lohnend ist, damit einmal Bekanntschaft gemacht zu haben. Die Fragen schließen direkt an einen kürzlich erschienenen Aufsatz von Lorenzen und Schmitz (2020) an.

## 1 Einleitung

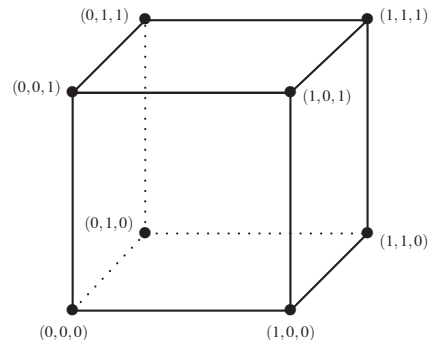
In einem kürzlich erschienenen Aufsatz betrachten Lorenzen und Schmitz (2020) die Irrfahrt eines Käfers auf dem Quadrat, dem Würfel und in höheren Dimensionen. Bezeichnet allgemein für  $d \geq 2$

$$Q_d = \{(j_1, \dots, j_d) : j_\ell \in \{0, 1\} \text{ für } \ell = 1, \dots, d\}$$

den  $d$ -dimensionalen Einheitswürfel, so startet der Käfer im Ursprung  $(0, \dots, 0)$ , und seine Schritte entlang der Kanten von  $Q_d$  erfolgen unabhängig voneinander und jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $1/d$ . Abb. 1 zeigt die Situation im Fall  $d = 3$ . Hier sind bei jeder Position des Käfers drei gleich wahrscheinliche Schritt-Richtungen möglich. Lorenzen und Schmitz (2020) behandeln die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Käfer nach  $n$  Schritten in der gegenüberliegenden Ecke  $(1, \dots, 1)$  angekommen ist. Allgemeiner kann man nach der zufälligen Position des Käfers nach  $n$  Schritten fragen.

In diesem Aufsatz geht es um ein *Wartezeitproblem*. Betrachtet man das Ankommen des Käfers im Punkt  $(1, \dots, 1)$  als einen Treffer, so fragen wir nach der Anzahl der Schritte, die der Käfer benötigt, um *erstmalig* einen Treffer zu erzielen. Deutet man die möglichen  $2^d$  Positionen des Käfers als *Zustände*, so bildet die Folge dieser Positionen eine Markov-Kette

mit Zustandsraum  $Q_d$ . Dabei sehen wir den Zustand  $(1, \dots, 1)$  als *absorbierend* an, stoppen also die Irrfahrt und damit die Markov-Kette, falls dieser Zustand zum ersten Mal erreicht wird.

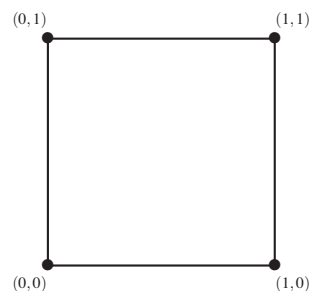


**Abb. 1:** Irrfahrt auf den Ecken des Würfels entlang jeweils drei gleich wahrscheinlicher Kanten

Im Folgenden bezeichne (unabhängig von der Dimension  $d$ )  $W$  die zufällige Anzahl der Schritte, die der Käfer ausführt, bis er erstmalig die gegenüberliegende Ecke  $(1, \dots, 1)$  erreicht. Zur Einstimmung betrachten wir zuerst den Fall  $d = 2$  und dann den Fall  $d = 3$ . Zusätzliche Gesichtspunkte ergeben sich im Fall höherer Dimensionen, wobei die Fälle  $d = 4$  und  $d = 5$  noch erschöpfend behandelt werden.

## 2 Die Irrfahrt auf dem Quadrat

Als Einstieg diene der in Abb. 2 dargestellte Fall  $d = 2$ .



**Abb. 2:** Irrfahrt auf den Ecken des Einheitsquadrates entlang jeweils zwei gleich wahrscheinlicher Kanten

Nachdem der Käfer seinen ersten, rein zufällig gewählten Schritt ausgeführt hat, befindet er sich entweder in der linken oberen Ecke  $(0, 1)$  oder in der rechten unteren Ecke  $(1, 0)$ . *Unabhängig davon* bringt ihn der nächste Schritt mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  in die rechte obere Ecke  $(1, 1)$ , und mit

Wahrscheinlichkeit  $1/2$  steht er wieder in seiner Ausgangsposition. Wir erhalten also die Gleichung

$$P(W = 2) = \frac{1}{2}.$$

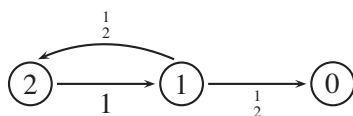
Befindet sich der Käfer nach zwei Schritten erneut in der linken unteren Ecke, so geht alles (unbeeinflusst von der Vorgeschichte) von neuem los, und die Wahrscheinlichkeit, nach zwei weiteren Schritten die rechte obere Ecke zu erreichen, ist gleich  $1/2$ , und somit gilt  $P(W = 4) = 1/4$ . Damit allgemein das Ereignis  $W = 2k$  eintritt, muss der Käfer  $k - 1$  mal hintereinander – wenn er in einer der beiden Ecken  $(1, 0)$  oder  $(0, 1)$  angekommen ist – in die Ausgangsecke  $(0, 0)$  zurückgeworfen werden, was unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  passiert. Beim  $k$ -ten Erreichen einer der beiden Ecken  $(1, 0)$  oder  $(0, 1)$  muss er aber Erfolg haben und seine Ziel-Ecke erreichen, was ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  geschieht. Es gilt somit

$$P(W = 2k) = \binom{1}{2}^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

oder gleichbedeutend

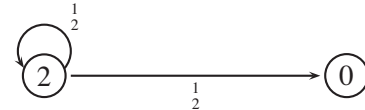
$$P\left(\frac{W}{2} = k\right) = \binom{1}{2}^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die Zufallsgröße  $W/2$  hat also die gleiche Verteilung wie die Anzahl der (je mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  einen Treffer ergebenden) Bernoulli-Versuche, bis der erste Treffer auftritt. Diese Einsicht rührt daher, dass der Käfer ja jedes Mal, wenn er wieder im Ausgangspunkt startet, einen Schritt zurücklegen muss, damit ein Bernoulli-Versuch einen Treffer ergeben kann. Abb. 3 veranschaulicht die Situation anhand des Übergangsgraphen der Markov-Kette, wobei die Zahlen an den Knoten die Hamming-Abstände zum Zielpunkt  $(1, 1)$  angeben. Allgemein ist der Hamming-Abstand zweier  $n$ -Tupel aus Einsen und Nullen gleich der Anzahl der verschiedenen Komponenten in beiden Tupeln. Der Knoten 1 steht also für die beiden Ecken  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  und der Knoten 2 für die Ausgangsecke  $(0, 0)$ .



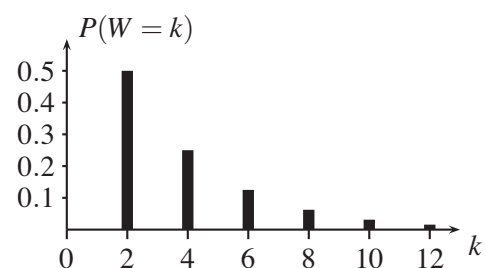
**Abb. 3:** Übergangsgraph der Markov-Kette (Hamming-Abstände zu  $(1, 1)$ )

Die obigen Überlegungen zeigen, dass man den Knoten 1 weglassen kann und de facto der Übergangsgraph in Abb. 4 vorliegt, wobei der Weg von 2 nach 0 eben doppelt so lang ist wie der von 2 nach 1 oder von 1 nach 0. Mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  bleibt man im Startzustand, und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  ist man nach zwei Schritten im Zielzustand.



**Abb. 4:** Reduzierter Übergangsgraph im Fall  $d = 2$

Abb. 5 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von  $W$ .



**Abb. 5:** Stabdiagramm der Verteilung von  $W$  ( $d = 2$ )

Den Erwartungswert von  $W$  kann man unter Verwendung der Ableitung der geometrischen Reihe gemäß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \binom{1}{2}^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{1}{2}^{k-1} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \Big|_{x=1/2} = 4 \end{aligned}$$

ausrechnen, und mit der zweiten Ableitung der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(W-1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2(k-1)+1) \binom{1}{2}^k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \binom{1}{2}^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k \binom{1}{2}^k \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} \Big|_{x=1/2} + 4 \\ &= 16 + 4 = 20 \end{aligned}$$

und damit unter Verwendung der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(W) &= \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)^2 \\ &= \mathbb{E}(W^2 - W + W) - \mathbb{E}(W)^2 \\ &= \mathbb{E}(W(W-1)) + \mathbb{E}(W) - \mathbb{E}(W)^2 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Einen Zugang zu den auftretenden Reihen auf Kursstufenniveau findet man in Abschnitt 8 von Henze (2018a).

### 3 Die Irrfahrt auf dem Würfel

In diesem Abschnitt wandert der Käfer auf den Kanten des Einheitswürfels. Offenbar sind wie schon im Fall  $d = 2$  nicht die genauen Positionen  $(j_1, j_2, j_3)$  des Käfers im Laufe der Irrfahrt relevant, sondern nur deren jeweilige, in der Anzahl der Nullen im Tripel  $(j_1, j_2, j_3)$  gemessene „Entfernung“ zum Punkt  $(1, 1, 1)$ , also der Hamming-Abstand, siehe Abb. 6.

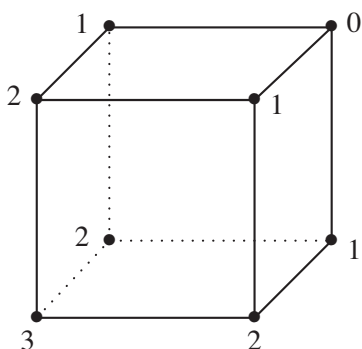


Abb. 6: Hamming-Distanzen zum Punkt  $(1, 1, 1)$

Die relevanten Zustände der Markov-Kette sind also die Hamming-Distanzen 3, 2, 1 und 0 zum Punkt  $(1, 1, 1)$ . Abb. 7 zeigt den Übergangsgraphen mit diesen Hamming-Distanzen als Knoten sowie Pfeilen, die die möglichen Übergänge zwischen den Knoten veranschaulichen, zusammen mit den jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten.

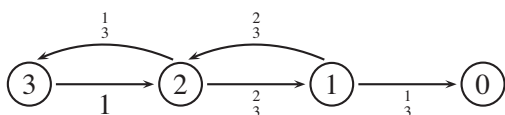


Abb. 7: Übergangsgraph der Markov-Kette (Hamming-Abstände zu  $(1, 1, 1)$ )

Offenbar kann die Anzahl  $W$  der Schritte bis zum ersten Treffer, also der Absorption der im Knoten 3 startenden Markov-Kette, nur jede der Zahlen  $3, 5, 7, \dots$  mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen, und es gilt (wie schon in Lorenzen und Schmitz (2020) mit einem anderen Ansatz erhalten)

$$P(W = 3) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \quad (1)$$

Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von  $W$ , ohne die Verteilung von  $W$  zu kennen, und verwenden dazu die manchmal auch als Mittelwertregel (Engel (1976), S. 22) bezeichnete Formel vom totalen

Erwartungswert, siehe Henze (2018b), S. 214: Sind  $A_1, \dots, A_n$  paarweise unvereinbare Ereignisse, deren (positive) Wahrscheinlichkeiten sich zu eins aufaddieren, so kann man den als existent angenommenen Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$  als gewichtete Summe

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot \mathbb{E}(X|A_j) \quad (2)$$

der bedingten Erwartungswerte von  $X$  unter der Bedingung, dass das Ereignis  $A_j$  eintritt, erhalten. Dabei sind die Gewichte gerade die Wahrscheinlichkeiten der  $A_j$ .

Um diese Formel nutzen zu können, gehen wir einen kleinen Umweg und betrachten den mit  $E_j(W)$  bezeichneten Erwartungswert von  $W$  unter der Annahme, dass die Irrfahrt im Zustand  $j$  startet,  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Offenbar gilt dann  $\mathbb{E}(W) = E_3(W)$ . Da wir mit Wahrscheinlichkeit eins vom Zustand 3 in den Zustand 2 gelangen, ergibt sich offenbar

$$E_3(W) = 1 + E_2(W). \quad (3)$$

Dabei rührt die Eins auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens daher, dass wir den einen Schritt zählen müssen, der uns vom Zustand 3 in den Zustand 2 bringt. Was passiert, wenn wir uns im Zustand 2 befinden? Jetzt gibt es zwei unvereinbare Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten sich zu eins aufaddieren, nämlich vom Zustand 2 aus in den Zustand 1 oder in den Zustand 3 zu gelangen. Gehen wir in den Zustand 1 über, so haben wir einen mitzuzählenden Irrfahrt-Schritt vollzogen, und aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Irrfahrt-Richtungen geht es dann mit einer im Zustand 1 startenden Irrfahrt weiter. Da Analoges für den Übergang vom Zustand 2 in den Zustand 3 gilt, liefert die Formel vom totalen Erwartungswert die Identität

$$E_2(W) = \frac{2}{3} \cdot (1 + E_1(W)) + \frac{1}{3} \cdot (1 + E_3(W)). \quad (4)$$

Mit dem gleichen Argument folgt

$$E_1(W) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (1 + E_2(W)). \quad (5)$$

Setzt man den in (3) stehenden Ausdruck für  $E_3(W)$  in (4) ein, so entstehen zusammen mit (5) zwei Gleichungen mit den Unbekannten  $E_2(W)$  und  $E_1(W)$ , woraus sich nach einfacher Rechnung  $E_2(W) = 9$  und somit nach (3)

$$\mathbb{E}(W) = E_3(W) = 10 \quad (6)$$

ergibt. Der Käfer benötigt also auf die Dauer im Mittel 10 Schritte, um erstmals in die gegenüberliegende Ecke zu gelangen.

Wir wenden uns nun dem Problem zu, die Wahrscheinlichkeit  $P(W = 3 + 2k)$ , dass der Käfer in genau  $3 + 2k$  Schritten erstmalig in der gegenüberliegenden Ecke ankommt, zu bestimmen. Dabei wurde der Fall  $k = 0$  schon in (1) abgehandelt. Ein Blick auf den Übergangsgraphen in Abb. 7 zeigt, dass wir – damit das Ereignis  $W = 5$  eintritt – entweder einmal die Schleife  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  oder einmal die Schleife  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  durchlaufen wird. Die erste Schleife besitzt die Wahrscheinlichkeit  $1/3$ , die zweite die Wahrscheinlichkeit  $4/9$ . Es gilt also

$$P(W = 5) = \binom{1}{3} + \binom{4}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{81}.$$

Im Unterschied hierzu ist die in Lorenzen und Schmitz (2020) berechnete Wahrscheinlichkeit, *überhaupt* (also nicht erstmalig) nach fünf Schritten im Zustand 0 zu sein, gleich  $20/81$ , da dann auch die Schleife  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  möglich ist. Damit das Ereignis  $W = 7$  eintritt, müssen insgesamt zwei Rückwärtssprünge bei den Zuständen 2 und 1 erfolgen. Diese können zweimal im Zustand 2 und zweimal im Zustand 1 sein; es kann aber auch zuerst ein Rückwärtssprung in 2 und danach einer in 1 erfolgen und umgekehrt. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} P(W = 7) &= \left( \binom{1}{3}^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \binom{4}{9}^2 \right) \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{98}{729}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall  $W = 3 + 2k$  werden insgesamt  $k$  Rückwärtsschritte durchlaufen, von denen  $\ell$  im Zustand 1 und  $k - \ell$  im Zustand 2 starten können ( $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$ ). Jede konkrete Irrfahrt, die nach  $3 + 2k$  Schritten erstmalig vom Zustand 3 in den Zustand 0 gelangt und  $\ell$  mal im Zustand 2 und  $k - \ell$  mal im Zustand 1 „zurücksetzt“, besitzt wegen der Kommutativität der Multiplikation die Wahrscheinlichkeit

$$\binom{1}{3}^\ell \cdot \binom{4}{9}^{k-\ell} \cdot \frac{2}{9}.$$

Da es  $\binom{k}{\ell}$  Möglichkeiten gibt, von den insgesamt  $k$  Rückwärtsschritten  $\ell$  im Zustand 2 und  $k - \ell$  im Zustand 1 zu beginnen, folgt wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \binom{1}{3}^\ell \binom{4}{9}^{k-\ell} &= \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \right)^k \\ &= \left( \frac{7}{9} \right)^k \end{aligned}$$

das Resultat

$$P(W = 3 + 2k) = \left( \frac{7}{9} \right)^k \cdot \frac{2}{9}, \quad k \geq 0.$$

Die Zufallsgröße  $X = (W - 3)/2$  hat also eine geometrische Verteilung mit Parameter  $p = 2/9$ . Sie beschreibt damit die Anzahl der Nieten vor dem ersten Treffer in einer Folge von Bernoulli-Versuchen mit gleicher Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ . Dieses auf den ersten Blick überraschende Resultat liefert nicht nur nachträglich einen Nachweis der Endlichkeit des Erwartungswertes von  $W$ , sondern wegen  $\mathbb{E}(X) = 1/p - 1$  (siehe Henze (2018b), S. 187) auch einen alternativen Nachweis von (6), denn es gilt

$$\mathbb{E} \binom{W-3}{2} = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

und damit  $\mathbb{E}(W) = 2 \cdot \frac{7}{2} + 3 = 10$ . Da die Varianz einer mit dem Parameter  $p$  geometrisch verteilten Zufallsgröße  $(1 - p)/p^2$  beträgt (Henze (2018b), S. 187), gilt somit

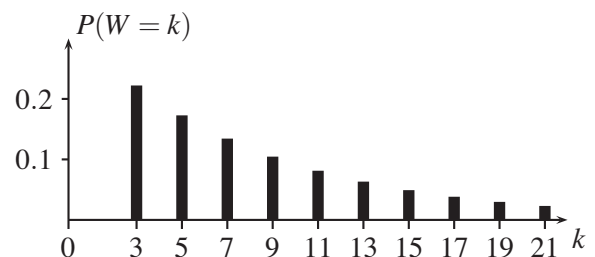
$$\mathbb{V} \binom{W-3}{2} = \frac{7/9}{(2/9)^2} = \frac{63}{4}.$$

Andererseits folgt mit allgemeinen Rechenregeln für die Varianz

$$\mathbb{V} \binom{W-3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \mathbb{V}(W-3) = \frac{1}{4} \cdot \mathbb{V}(W),$$

woraus sich die Varianz von  $W$  zu  $\mathbb{V}(W) = 63$  ergibt.

Abb. 8 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von  $W$ .



**Abb. 8:** Stabdiagramm der Verteilung von  $W$  ( $d = 3$ )

Kann man begrifflich einsehen, *warum*  $(W - 3)/2$  eine geometrische Verteilung mit dem Parameter  $p = 2/9$  besitzt? Hierzu nehmen wir noch einmal den Übergangsgraphen in Abb. 7 in Augenschein. Da man gleich nach dem ersten Schritt im Zustand 2 ist und jedes Mal nach einem eventuellen späteren Aufenthalt in 3 nach einem Schritt sofort wieder in 2 ankommt, liegt es nahe, den Zustand 3 einfach wegzulassen. Wichtig ist natürlich, dass man den ersten Schritt von 3 nach 2 mitzählt. Vom Zustand 2

aus gesehen gelangt man mit der Wahrscheinlichkeit  $2/3 \cdot 1/3$  in zwei Schritten in den Zielzustand. Wenn wir also diesen zweischrittigen Übergang von 2 nach 0 als „Treffer“ deuten, so beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit  $2/9$ . Was ist dann das komplementäre Ereignis, also die „Niete“? *Nicht* in zwei Schritten von 2 aus nach 0 zu gelangen bedeutet, entweder zwei vergebliche Schritte zu machen und von 1 aus nach 2 zurückgeworfen zu werden (was mit der Wahrscheinlichkeit  $2/3$  geschieht), oder zwei vergebliche Schritte lang im Zustand 2 zu bleiben (weil man ja über 3 nach 2 zurückgekommen ist), und das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit  $1/3$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines dieser beiden Ereignisse eintritt, ist aber gleich  $1 - 2/9 = 7/9$ . Diese Überlegungen münden in den in Abb. 9 dargestellten reduzierten Übergangsgraphen.

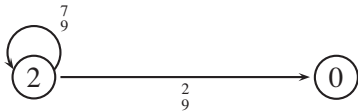


Abb. 9: Reduzierter Übergangsgraph im Fall  $d = 3$

Subtrahieren wir von der Gesamtanzahl  $W$  der nötigen Schritte zum Zielpunkt die Mindestanzahl 3, so resultiert die mit dem Faktor 2 versehene Anzahl der Niete (nämlich Verbleiben im Zustand 2) vor dem ersten Treffer bei Bernoulli-Versuchen mit Trefferwahrscheinlichkeit  $2/9$ , und diese Anzahl der Niete besitzt die erhaltene geometrische Verteilung.

#### 4 Der Fall $d = 4$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall  $d = 4$ , wobei mit der erzeugenden Funktion ein mächtiges Werkzeug ins Spiel kommt. Verläuft die Irrfahrt auf den Kanten des 4-dimensionalen Würfels, so ist im Vergleich zu Abb. 7 der Übergangsgraph der Markov-Kette der Hamming-Distanzen zur „Ziel-Ecke“  $(1, 1, 1, 1)$  in Abb. 10 dargestellt.

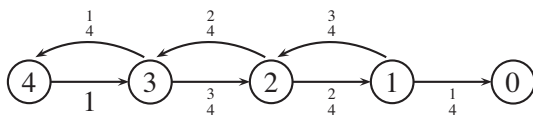


Abb. 10: Übergangsgraph der Markov-Kette (Hamming-Abstände zu  $(1, 1, 1, 1)$ )

Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von  $W$  mithilfe der Formel (2) vom totalen Erwartungswert. Bezeichnet  $E_j(W)$  den Erwartungswert von  $W$ , wenn die Irrfahrt im Zustand  $j$  startet ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ), so

gelten analog zu den im vorigen Abschnitt angestellten Überlegungen

$$E_4(W) = 1 + E_3(W), \quad (7)$$

$$E_3(W) = 1 + \frac{3}{4} E_2(W) + \frac{1}{4} E_4(W), \quad (8)$$

$$E_2(W) = 1 + \frac{1}{2} E_1(W) + \frac{1}{2} E_3(W), \quad (9)$$

$$E_1(W) = 1 + \frac{3}{4} E_2(W). \quad (10)$$

Setzt man den Ausdruck für  $E_4(W)$  von Gleichung (7) in (8) und den von  $E_1(W)$  in (10) in (9) ein, so ergeben sich die Beziehungen

$$E_3(W) = \frac{5}{3} + E_2(W),$$

$$E_3(W) = \frac{5}{4} E_2(W) - 3.$$

Hieraus erhält man  $E_3(W) = \frac{61}{3}$ , und mit (7) folgt dann

$$\mathbb{E}(W) = E_4(W) = \frac{64}{3} = 21 \frac{1}{3}. \quad (11)$$

Wie kann man an die Verteilung von  $W$  gelangen? Offenbar nimmt  $W$  nur geradzahlige Werte an, die mindestens gleich 4 sind, und es gilt

$$P(W = 4) = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}.$$

Damit das Ereignis  $W = 6$  eintritt, muss in genau einem der Zustände 3, 2 oder 1 eine „zweischrittige Rückwärtsschleife“ eingelegt werden. Da die Wahrscheinlichkeiten dieser Schleifen  $1/4$  bzw.  $3/8$  bzw.  $3/8$  betragen, folgt

$$P(W = 6) = \left( \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} \right) \frac{3}{32} = \frac{3}{32}.$$

Wegen  $P(W = 4) = P(W = 6)$  gibt es also im Unterschied zu den Fällen  $d = 2$  und  $d = 3$  keinen Zusammenhang mit einer geometrischen Verteilung (die man für die Zufallsgröße  $(W - 4)/6$  hätte vermuten können), da bei der geometrischen Verteilung die Wahrscheinlichkeiten streng monoton fallen.

Komplexer wird es bereits im Fall  $W = 8$ . Hier müssen genau zwei solcher Rückwärtsschleifen eingelegt werden. Das können je zwei Schleifen in den Zuständen 3, 2 und 1 sein, aber auch in der Reihenfolge wechselseitig bei den Zuständen 3 und 2 sowie bei den Zuständen 2 und 1. Hinzu kommt noch die eine Möglichkeit, dass zuerst eine Schleife im Zustand 3 und später eine im Zustand 1 eingelegt wird.



Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für alle diese Fälle, so folgt

$$P(W = 8) = \left( \binom{1}{4}^2 + 4 \cdot \binom{3}{8}^2 + 3 \cdot \frac{3}{32} \right) \cdot \frac{3}{87} = \frac{3}{1024}.$$

Offenbar ist diese Vorgehensweise kaum praktikabel, um einen geschlossenen Ausdruck für  $P(W = 4 + 2k)$ ,  $k \geq 0$ , zu erhalten. Wir werden jetzt ein wirklich schlagkräftiges Mittel vorstellen, mit dessen Hilfe sich das überraschende Resultat

$$P(W = 4 + 2k) = \frac{3}{8\sqrt{10}} \left\{ \binom{4+\sqrt{10}}{8}^{k+1} - \binom{4-\sqrt{10}}{8}^{k+1} \right\}, \quad (12)$$

$k \geq 0$ , ergibt.

Zunächst zeigt eine direkte Rechnung, dass diese allgemeine Formel für die speziellen Fälle  $k = 0$ ,  $k = 1$  und  $k = 2$  die oben hergeleiteten Wahrscheinlichkeiten liefert.

Die entscheidende Idee, wie man zu (12) gelangt, und die auch für den Fall  $d \geq 5$  funktioniert, besteht darin, die sogenannte *erzeugende Funktion* von  $W$  zu betrachten. Nach Definition ist diese erzeugende Funktion die Potenzreihe

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(W = 4 + 2k)t^{4+2k},$$

und diese konvergiert auf jeden Fall für jedes  $t$  mit  $|t| \leq 1$ . Das Ziel besteht darin, einen geschlossenen Ausdruck für  $G(t)$  herzuleiten und diesen in eine Potenzreihe um 0 zu entwickeln. Der Koeffizient vor  $t^{4+2k}$  in dieser Potenzreihe ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(W = 4 + 2k)$ . Für eine Einführung in erzeugende Funktionen siehe z.B. Henze (2018b), Kapitel 25. Da allgemein der Erwartungswert einer Funktion  $h(X)$  einer nichtnegativen ganzzahligen Zufallsgröße  $X$  durch  $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{j \geq 0} h(j)P(X = j)$  gegeben ist, gilt

$$G(t) = \mathbb{E}(t^W). \quad (13)$$

Diese Erkenntnis wird für das weitere Vorgehen entscheidend sein.

Um (12) herzuleiten, gehen wir wieder einen kleinen, aber äußerst nützlichen Umweg. In der Abb. 10 sei für jedes  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$   $W_j$  die zufällige Anzahl der Schritte, die der Käfer benötigt, um erstmalig *vom*

*Zustand  $j$  aus* in den Zielzustand 0 zu gelangen. Uns interessiert zwar nur die Verteilung von  $W (= W_4)$ , aber die anderen Zufallsvariablen werden als Hilfsgrößen nicht minder wichtig sein. Die erzeugende Funktion von  $W_j$  nennen wir  $G_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Es gilt also insbesondere  $G = G_4$ . Wie jetzt ausgeführt wird, gelten dann ganz analog zu den aus der Formel vom totalen Erwartungswert resultierenden Gleichungen (7) – (10) die Beziehungen

$$G_4(t) = tG_3(t), \quad (14)$$

$$G_3(t) = t \left( \frac{3}{4}G_2(t) + \frac{1}{4}G_4(t) \right), \quad (15)$$

$$G_2(t) = t \left( \frac{1}{2}G_3(t) + \frac{1}{2}G_1(t) \right), \quad (16)$$

$$G_1(t) = t \left( \frac{3}{4}G_2(t) + \frac{1}{4} \right). \quad (17)$$

Um Gleichung (14) einzusehen, beachte man, dass  $W_4$  und  $1 + W_3$  die gleiche Verteilung und damit auch die gleiche erzeugende Funktion haben. Wegen der Darstellung (13) folgt also

$$G_4(t) = \mathbb{E}(t^{W_4}) = \mathbb{E}(t^{1+W_3}) = t\mathbb{E}(t^{W_3})$$

und damit (14). Um (15) einzusehen, genügt ein Blick auf Abb. 10. Startet man im Zustand 3, so sind nach einem Schritt mit Wahrscheinlichkeit  $3/4$  noch  $W_2$  Schritte zu absolvieren, und mit Wahrscheinlichkeit  $1/4$  steht man wieder ganz am Anfang und hat man nach einem vollzogenen Schritt noch  $W_4'$  Schritte vor sich. Dabei ist  $W_4'$  eine Zufallsgröße, die die gleiche Verteilung wie  $W_4$  besitzt. Schreiben wir allgemein die Verteilungsgleichheit zweier Zufallsgrößen  $Y$  und  $Z$  in der Kurzform  $Y \sim Z$ , und modellieren wir die vom Zustand 3 ausgehende Schritt-Richtung als Zufallsgröße  $U_3$  mit der Binomialverteilung  $\text{Bin}(1, 3/4)$ , so liefern obige Überlegungen die Verteilungsgleichheit

$$W_3 \sim U_3(1 + W_2) + (1 - U_3)(1 + W_4'). \quad (18)$$

Man beachte, dass je nach Realisierung von  $U_3$  (1 bzw. 0) auf der rechten Seite nur ein Summand auftritt, und dass die Zufallsgrößen  $U_3$ ,  $W_2$  und  $W_4'$  aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Schritt-Richtungen der Irrfahrt stochastisch unabhängig sind. Aus der Verteilungsgleichheit in (18) sowie  $U_3 + 1 - U_3 = 1$  folgt zunächst

$$G_3(t) = \mathbb{E}(t^{W_3}) = \mathbb{E}(t^{1+U_3W_2+(1-U_3)W_4'}) = t\mathbb{E}(t^{U_3W_2+(1-U_3)W_4'}). \quad (19)$$

Den Erwartungswert in (19) rechnen wir nach der Formel (2) vom totalen Erwartungswert aus, indem

wir nach den beiden Ereignissen  $U_3 = 1$  und  $U_3 = 0$  bedingen. Der Erwartungswert in (19) ist also gleich

$$\frac{3}{4} \mathbb{E}(t^{W_2} | U_3 = 1) + \frac{1}{4} \mathbb{E}(t^{W_4} | U_3 = 0).$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $W_2$  und  $U_3$  bzw.  $W_4$  und  $U_3$  hängen die beiden bedingten Erwartungswerte nicht von der jeweiligen Bedingung ab. Wegen  $G_2(t) = \mathbb{E}(t^{W_2})$  und  $G_4(t) = \mathbb{E}(t^{W_4})$  folgt dann zusammen mit (19) Gleichung (15). Völlig analog ergeben sich die Gleichungen (16) und (17).

Setzt man den Ausdruck für  $G_1(t)$  aus (17) in (16) sowie den von  $G_4(t)$  in (14) in (15) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} G_2(t) \left(1 - \frac{3t^2}{8}\right) &= \frac{t}{2} G_3(t) + \frac{t^2}{8}, \\ G_3(t) \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) &= \frac{3t}{4} G_2(t). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit etwas Rechnung

$$G_3(t) = \frac{12t^2}{(4-t^2)(8-3t^2)} G_3(t) + \frac{12t^3}{(4-t^2)(32-12t^2)}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $t$  durch, so folgt unter Beachtung von (14) und  $G = G_4$  der geschlossene Ausdruck

$$G(t) = \frac{3t^4}{32 - 32t^2 + 3t^4} \quad (20)$$

für die erzeugende Funktion von  $W$ . Diesen Ausdruck müssen wir in eine Potenzreihe entwickeln. Setzen wir  $x = t^2$ , so führt die Gleichung

$$32 - 32x + 3x^2 = 0$$

auf die Lösungen

$$x_1 = \frac{16 + 4\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{16 - 4\sqrt{10}}{3}.$$

Hiermit gilt dann

$$G(t) = \frac{3t^4}{8\sqrt{10}} \left( \frac{1}{t^2 - x_1} - \frac{1}{t^2 - x_2} \right),$$

und wegen

$$\frac{1}{t^2 - x_j} = -\frac{1}{x_j} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1}{x_j}^k t^{2k}, \quad |t| < \sqrt{x_j},$$

für  $j \in \{1, 2\}$  (geometrische Reihe!) folgt

$$\begin{aligned} &G(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{8\sqrt{10}} \left( \binom{1}{x_2}^{k+1} - \binom{1}{x_1}^{k+1} \right) t^{4+2k} \end{aligned}$$

und damit (12).

Da der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich der Wurzel aus  $x_2 = 1.116\dots$  und damit größer als eins ist, ist die erzeugende Funktion an der Stelle 1 beliebig oft differenzierbar, und aus (20) ergibt sich die erste Ableitung mit der Quotientenregel und ein wenig Rechnung zu

$$G'(t) = \frac{192t^3(2-t^2)}{(32-32t^2+3t^4)^2}.$$

Hiermit folgt

$$\mathbb{E}(W) = G'(1) = \frac{64}{3},$$

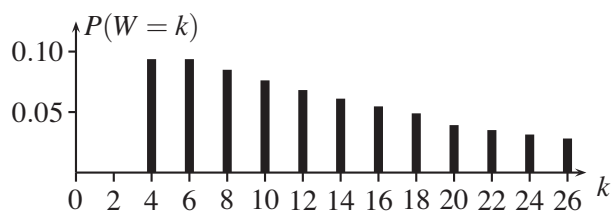
in Übereinstimmung mit (11). Mit etwas Geduld (oder einem Computeralgebra-System) ergibt sich die zweite Ableitung von  $G$  zu

$$G''(t) = \frac{192t^2(9t^6 + 2t^4 - 96t^2 + 192)}{(32 - 32t^2 + 3t^4)^3}.$$

Hieraus erhält man wegen  $\mathbb{V}(W) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$  die Varianz von  $W$  zu

$$\mathbb{V}(W) = \frac{2944}{9} = 327.111\dots$$

Abbildung 11 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von  $W$ .



**Abb. 11:** Stabdiagramm der Verteilung von  $W$  ( $d = 4$ )

Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten  $P(W = 4 + 2k)$  in Abhängigkeit von  $k$  wesentlich langsamer abfallen als die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P(W = 3 + 2k)$  in Abb. 8 für den Fall  $d = 3$  oder erst recht die in Abb. 5 dargestellten entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P(W = 2 + 2k)$  im Fall  $d = 2$ .

## 5 Höhere Gesichtspunkte und Verwandtes

Prinzipiell liefern erzeugende Funktionen die Verteilung von  $W$  für jede Dimension  $d$ . So besitzen die (14)- (17) entsprechenden Gleichungen im Fall  $d = 5$  die Gestalt

$$\begin{aligned} G_5(t) &= tG_4(t), \\ G_4(t) &= t \left( \frac{4}{5} G_3(t) + \frac{1}{5} G_5(t) \right), \\ G_3(t) &= t \left( \frac{3}{5} G_2(t) + \frac{2}{5} G_4(t) \right), \\ G_2(t) &= t \left( \frac{2}{5} G_1(t) + \frac{3}{5} G_3(t) \right), \\ G_1(t) &= t \left( \frac{4}{5} G_2(t) + \frac{1}{5} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $G_j$  die erzeugende Funktion der Anzahl von Schritten, bis ausgehend vom Start im Zustand  $j$  (Hamming-Abstand  $j$  zum Ziel-Zustand) erstmalig der Ziel-Zustand erreicht wird. Dieses lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten  $G_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) lässt sich problemlos z.B. mit dem Computeralgebra-System MAPLE lösen, und es folgt

$$G(t) = \frac{24t^5}{149t^4 - 750t^2 + 625},$$

wobei kurz  $G := G_5$  gesetzt wurde. Für den Erwartungswert von  $W$  ergibt sich

$$\mathbb{E}(W) = G'(1) = \frac{128}{3} = 42 \frac{2}{3}$$

(wie man auch mithilfe der Formel vom totalen Erwartungswert bestätigt), und die über die 2. Ableitung von  $G$  berechnete Varianz von  $W$  ist gleich  $\mathbb{V}(W) = \frac{13000}{9} = 1444.44\dots$ . Die Standardabweichung von  $W$  ist also etwas kleiner als der Erwartungswert. Setzt man  $x := t^2$ , so sind die Lösungen der quadratischen Gleichung  $149x^2 - 750x + 625 = 0$  durch

$$x_1 = \frac{375 + 50\sqrt{19}}{149}, \quad x_2 = \frac{375 - 50\sqrt{19}}{149}$$

gegeben, und die gleiche Vorgehensweise wie im Fall  $d = 4$  liefert

$$\begin{aligned} &P(W = 5 + 2k) \\ &= \frac{24}{100\sqrt{19}} \left( \binom{1}{x_2}^{k+1} - \binom{1}{x_1}^{k+1} \right), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Eine verwandte interessante Fragestellung ist die Folgende: Wie viele Schritte muss der Käfer gehen,

bis er erstmals *jede Ecke besucht hat*? Bezeichnen wir diese Schrittzahl mit  $S$ , so gibt es hinsichtlich der Verteilung und sogar des Erwartungswertes von  $S$  fast nur offene Probleme. So geben die Herausgeber des American Mathematical Monthly (AMM Editors (1989)) die Erwartungswerte 6 im Fall  $d = 2$  und  $\frac{1996}{95} = 21 \frac{1}{95}$  im Fall  $d = 3$  an. Die Verteilung von  $S$  ist schon im Fall  $d = 3$  unbekannt, und im Fall  $d \geq 4$  kennt man nicht einmal den Erwartungswert von  $S$ .

Lorenzen und Schmitz (2020) weisen auf den Zusammenhang des Käferproblems mit dem diskreten Diffusionsmodell des Physikers Paul Ehrenfest und der Mathematikerin Tatjana Ehrenfest hin (siehe Ehrenfest und Ehrenfest (1907)). In diesem Modell befinden sich in zwei Behältern A und B zusammen  $d$  Kugeln. Man wählt eine der Kugeln rein zufällig aus und legt sie in den jeweils anderen Behälter, wobei dieser Vorgang in unabhängiger Folge wiederholt wird. Im Fall des Käferproblems sind zu Beginn alle Kugeln in Behälter A, und der Prozess stoppt, wenn sich erstmals alle Kugeln im anderen Behälter befinden. Im Rahmen des Ehrenfestschen Urnenmodells interessiert insbesondere die invariante Verteilung der Anzahl der Kugeln in Behälter A, die durch die Binomialverteilung  $\text{Bin}(d, 1/2)$  gegeben ist, siehe z.B. Georgii (2009), S. 166–167.

## 6 Schlussbemerkungen

Stochastik lebt von spannenden konkreten Fragen. Eine davon ist die behandelte Käferwanderung. Dabei können die Fälle  $d = 2$  und  $d = 3$  sowie die Herleitung der Wahrscheinlichkeiten  $P(W = 4)$ ,  $P(W = 6)$  und  $P(W = 8)$  im Fall  $d = 4$  auf Kurstufenniveau behandelt werden. Als mathematischer Überbau ist dabei die erzeugende Funktion von hoher Relevanz. Das hier vorgestellte Problem kann entweder direkt im Anschluss an die in Lorenzen und Schmitz (2020) vorgestellte Fragestellung oder auch unabhängig davon im Unterricht thematisiert werden. Dabei eignet es sich insbesondere im Kontext der Markov-Ketten, die in einigen Bundesländern fester Bestandteil des Lehrplans sind. Besonders spannend ist hier, dass die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nicht durch das Potenzieren der Übergangsmatrizen gefunden werden können. Variiert man die in Lorenzen und Schmitz (2020) vorgestellte Aufgabe also nur geringfügig, so kann im gleichen Kontext weiter gedacht und geknobbelt werden. Damit ist es möglich, auf verschiedenen Anforderungsniveaus an der gleichen Fragestellung zu arbeiten.



**Danksagung:** Wir danken den Gutachtern für wertvolle Hinweise.

## Literatur

- Editors of *The American Mathematical Monthly* (1989). Solutions of Advanced Problems. Cubical Walks. *The American Mathematical Monthly* 96(6), 848–849.
- Ehrenfest, P., und Ehrenfest, T. (1907). Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem. *Physikalische Zeitschrift* 8 (9), 311–314.
- Engel, A. (1976). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 2. Stuttgart, Klett.
- Georgii, O. (2009). Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 4. Auflage. Verlag de Gruyter. Berlin.
- Henze, N. (2018a). Wartezeitprobleme in Bernoulli-Ketten: Ein verständnisorientierter Zugang. *Stochastik in der Schule* 38(3), 24–31.
- Henze, N. (2018b). Stochastik für Einsteiger, 12. Auflage. Heidelberg, Springer Spektrum.
- Lorenzen, H., und Schmitz, M. (2020). Die Irrfahrt eines Käfers auf dem Quadrat, dem Würfel und in höheren Dimensionen. *Stochastik in der Schule* 40(2), 15–21.

Anschriften der Verfasser:

Prof. i.R. Dr. Norbert Henze  
KIT Distinguished Senior Fellow  
Institut für Stochastik  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Englerstr. 2  
76131 Karlsruhe  
Henze@kit.edu

Dr. Judith Schilling  
Fachbereich Mathematik, AG Didaktik  
Technische Universität Darmstadt  
Schlossgartenstr. 7  
64289 Darmstadt  
schilling@mathematik.tu-darmstadt.de